Sesión de problemas

15/01/2021

Ejercicio 1. *Un cono tiene radio de la base* 1 *y altura* 3. *Hay un cubo inscrito en el cono de forma que una cara del cubo está contenida en la base del cono. ¿Cuál es el lado del cubo?*

Ejercicio 2. *Dados 5 puntos en una esfera, probar que podemos encontrar un hemisferio (media esfera) cerrado conteniendo al menos 4 puntos.*

Ejercicio 3. S *es un conjunto finito de puntos en el plano tal que el área del triángulo* ABC *es menor o igual que* 1 *para cualesquiera* $A, B, C \in S$. *Prueba que el conjunto* S *se puede cubrir con un triángulo de área* 4.

Ejercicio 4. a *y* b *son dos números reales positivos tales que* $a+b=1$. *Prueba que* $(a+1/a)+(b+1/b) \geq 5/2$.

Ejercicio 5. a, b *y* c *son tres números reales positivos tales que* $a+b+c=1$. *Prueba que* $(a+1/a)^{10}+(b+1/b)^{10}+(c+1/c)^{10} \geq 10^5$.

Ejercicio 6. *Sea* $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que existen cuatro enteros distintos* a, b, c, d *tales que* $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. *Probar que no existe ningún entero* k *tal que* $P(k) = 8$.

Ejercicio 7. *Sean* x, y, z *reales positivos tales que* $x+y+z=3$. *Halla el máximo valor alcanzado por* $\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+3}$. *¿Cuándo se alcanza el máximo?*

Ejercicio 8. *Una casa tiene un número par de lámparas repartidas en sus habitaciones, de forma que cada habitación tiene al menos* 3 *lámparas. Cada interruptor afecta a exactamente dos lámparas, no necesariamente de la misma habitación. Cada lámpara solo tiene un interruptor asociado. Prueba que siempre es posible usar los interruptores de forma que cada habitación tenga al menos una lámpara encendida y otra apagada.*

Ejercicio 9. *Prueba que existen enteros* a, b, c *no todos nulos y cada uno de valor absoluto menor que un millón tales que* $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$.

Ejercicio 10. *Encontrar todos los enteros positivos* a, b *con* $a < b$, $1/a + 1/b = 3/2021$.

Ejercicio 11. *Si pintamos cada punto del plano de azul, rojo o verde, probar que hay dos puntos a distancia* 1 *con el mismo color.*

Ejercicio 12. *Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaciendo*

$$f(x^2+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y.$$

Ejercicio 13. *Sabemos que* 5^{2019} *empieza por* 1 *y tiene* 1412 *dígitos. Determina cuántos números del conjunto* $\{5^k, 1 \leq k \leq 2019\}$ *empiezan por* 1.

Ejercicio 14. *Hallar los números naturales* n *tales que* $3^{2n} + 3n^2 + 7$ *es un cuadrado perfecto.*

Ejercicio 15. *Sea* $a_n = n^2 + 10$ *para* $n \geq 1$*. Para cada* n*, denotamos por* d_n *el máximo común divisor de* a_n *y* a_{n+1}*. Encuentra el valor máximo de* d_n*.*

Ejercicio 16. *Los enteros* x, y *satisfacen* $2x^2 + x = 3y^2 + y$*. Muestra que* $x - y$*,* $2x + 2y + 1$*,* $3x + 3y + 1$ *son todos cuadrados perfectos.*

Ejercicio 17. *La sucesión de Fibonacci* $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ *se define como* $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *para* $n \geq 2$*. Prueba que para algún* k*,* F_k *es múltiplo de* $N = 10^{10^{10^{10}}}$*.*

Ejercicio 18. *Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaciendo*

$$(x + y^2)f(yf(x)) = xyf(y^2 + f(x))$$